数理解析研究所講究録
第 830 巻 1993 年 56-64

水波と浮体の相互作用について

九州大学応用力学研究所
大楠　丹
Makoto Ohkusu

1．まえがき

水波と浮体の相互干渉に関して数理的に興味のある課題は少なくないが、ここでは水波中を一定の速度で進行する船舶の周囲に生ずる波動場や、このとき作用する波力の決定に話を限ることにする。この問題は船舶工学上の重要な研究課題であるが、数理的なあるいは数値計算上の取り扱いが意外に厄介で、弱非線形の領域すらようやく最近研究されるようになったばかりである。

線形に問題を限定しても、次のような課題が未解決である。

（１）船の周りの流れの定常な部分は、主として船の幾何学的な形状によって支配される。自由表面条件などを線形化しようとすれば、船が十分に細長いなどの仮定が必要となる。一方、非定常な流れは、船の動揺あるいはそれをもたらす入射波浪の大きさに関して線形化される。したがって両者の相互作用をきちんと考慮することはそんなに簡単ではない。

（２）船の周りの波動の分散関係式が見掛け上、非等方的となり、いくらでも短い波長の波が存在することから、境界要素法などの数値計算に種々の難しさが生じる。

（３）自由表面と船の表面の交わる曲線上に特異点が生じて解が決まらない場合があったり、数値計算上でも困難が多い。

（４）遠方のいわゆる open boundary の条件を、数値計算に正確に反映させることが容易ではない。これの原因の一つは、上に述べた（２）である。

以下で説明するいくつかの研究例でもこのことを念頭において読んでいただければ幸いである。

2. 波浪中を一定の速度で進行する船の周りの波動場の計測と解析

一定周波数の水波中を航走する船のまわりの非定常な波動を計測して、この現象を物理的に理解することがが数理解析の上でも重要である。これらの波は、船に固定した座標系では周期的に変動する波である。したがって周期的変動の振幅と位相の空間的分布が我々の必要とする情報である。

船とともに前進する座標系内の一点（水槽試験の場合は模型線を曳航する装置に固定した点）に波高計をとりつけ、一定の時間の間、水面の変動を計測する。この記録から水面の変動の振幅、位相及び定常な変位が求められる。しかしこれでは座標系内の僅か１ヶ所における情報を知り得たにすぎない。この情報の空間分布を知るためには何千回もの試験が必要となり到底現実的とは云えない。

我々の考案した方法は、数本の波高計を模型船の航路に平行な一本の線上に等間隔で、水槽に対して固定するものである。こうすると各々の波高計は、船の平均位置に固定した座標系（今後、特に説明のないかぎり座標系はこの意味で用いる）内の１点に、各々別々の時刻に到達する。したがってその１点における波高計の数だけの別々の時刻の波高記録が得られる。我々は、その点における波面の変動が定常値＋一定周期の正弦的変動であることを知っているので、この記録から定常値及び正弦的変動の振幅と位相を求めることができる。

このプロセスは波高計の通過するあらゆる場所で実施できるので、船の航跡に平行な線上における、船にのった観測者から見て定常な波高、非定常な波の振幅と位相の分布が得られる。

周波数ωで変動する波源が、x の負方向への一様な流速 Uの流れの中で原点にある時（座標系は右手系で水面に原点があり、z 軸は鉛直上方を正とする）、x 軸方向となす角θの方向に進む波の波数を kとすると, 次の分散関係が満足されなければならない。

$$(U\cos\theta+\frac{\omega}{k})=\pm\sqrt{\frac{g}{k}} \tag{1}$$

これを波数に関して陽に書くと

$$k_{1,2}=\frac{K_0}{2\cos^2\theta}(1-2\tau\cos\theta\pm\sqrt{1-4\tau\cos\theta}) \tag{2}$$

となり、各進行方向に二つの波数が対応する。そして船の作る波$\eta(x,y)e^{i\omega t}$は線型理論では次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\eta=&\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi-\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\right]F_1(\theta)e^{-ik_1(x\cos\theta+y\sin\theta)}d\theta\\&+\left[\int_{\varphi-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_0}+\int_{\alpha_0}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\right]F_2(\theta)e^{-ik_2(x\cos\theta+y\sin\theta)}d\theta\\&+O(1/\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned} \tag{3}$$

ただし

$$K_0=\frac{g}{U^2}\qquad\varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}\qquad\alpha_0=\cos^{-1}\frac{1}{4\tau}\qquad\tau=\frac{U\omega}{g} \tag{4}$$

ここで $F_1(\theta), F_2(\theta)$ は波形を代表する量であり、船の波浪中の造波抵抗の増加量、船体運動の減衰係数等船舶流体力学上重要な諸量は全てこの量の２乗を被積分関数とする積分で表示される。

計測された$\eta(x,y)$ を x 方向にフーリエ変換すると次式によって $F_1(\theta)$ と $F_2(\theta)$ の計測値が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x;y)e^{i\lambda x}dx = \begin{cases} 2\pi\dfrac{F_1(\theta)}{g_1(\theta)}e^{ik_1 y\cdot\mathrm{sgn}(\cos\theta)\sin\theta} \\ \qquad \text{for } \lambda \geq K_0\tau \quad \text{or} \quad \lambda \leq -K_0(1+2\tau+\sqrt{1+4\tau})/2 \\ \qquad \alpha_0 \leq \theta \leq \pi : \text{the solution of } \lambda = k_1\cos\theta \\ 2\pi\dfrac{F_2(\theta)}{g_2(\theta)}e^{-ik_2 y\sin\theta} \\ \qquad \text{for } -K_0(1+2\tau-\sqrt{1+4\tau})/2 \leq \lambda \leq K_0\tau \\ \qquad \alpha_0 \leq \theta \leq \pi : \text{the solution of } \lambda = k_2\cos\theta \end{cases} \tag{5}$$

ただし

$$g_{1,2}(\theta) = \pm k_{1,2}\sin\theta/\sqrt{1-4\tau\cos\theta} \tag{6}$$

船が高速になるにしたがい、船によって作られる波の存在する範囲は船を頂点とするせまい角度の中に入るようになることが知られている。また波形の中では、船の航路に平行な波頂をもった波が支配的となる。したがって、船の長さ方向 x 軸方向への波形のフーリエ変換よりは、船の幅方向 y方向へのフーリエ変換が精度上望ましい。幅方向であれば、高速の場合にはある地点より外側に波は無く、そこでフーリエ変換を打ち切っても精度上問題がない。

$\eta(x,y)$ の y方向のフーリエ変換は次式であたえられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,y)e^{i\mu y}dy = \begin{cases} -2\pi\dfrac{F_1(\theta)}{f_1(\theta)}e^{-ik_1(\theta)x\cos\theta} - 2\pi\dfrac{F_1(\theta^*)}{f_1(\theta^*)}e^{-ik_1(\theta^*)x\cos\theta^*} \\ \qquad \text{for } \mu > 4K_0\tau^2\sin\alpha_0, \\ \qquad \alpha_0 \leq \theta,\theta^* \leq \pi : \text{two solutions of } \mu = k_1\sin\theta \\ +2\pi\dfrac{F_2(\theta)}{f_2(\theta)}e^{-ik_2(\theta)x\cos\theta} - 2\pi\dfrac{F_1(\theta^*)}{f_1(\theta^*)}e^{-ik_1(\theta^*)x\cos\theta^*} \\ \qquad \text{for } 0 < \mu < 4K_0\tau^2\sin^2\alpha_0, \\ \qquad \alpha \leq \theta \leq \pi : \text{the solution of } \mu = k_2\sin\theta \\ \qquad \dfrac{\pi}{2} \leq \theta^* \leq \pi : \text{the solution of } \mu = k_1\sin\theta \end{cases} \tag{7}$$

ただし

$$f_{1,2}(\theta) = -\frac{k_{1,2}}{\cos\theta}\left(1 \pm \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-4\tau\cos\theta}}\right) \tag{8}$$

これらの式から分かるように波形のy方向のフーリエ変換は、$F_1(\theta)$ と $F_1(\theta^*)$ あるいは $F_2(\theta)$ と $F_1(\theta^*)$ $(\theta \neq \theta^*)$ の線形和をあたえる。したがってフーリエ変換によって $F_1(\theta)$、$F_2(\theta)$ を一義的に決定することはできない。そこで２つ以上の x における波形をフーリエ変換すると（７）の式が２組得られるのでそれを用いて $F_1(\theta)$ と $F_2(\theta)$ を求める方法が考えられる。

以上のような方法により $F_{1,2}(\theta)$ を実験的に求めて、船より遠方におけるエネルギー流束から船の波浪中の造波抵抗を求めることが出来る。研究の結果、この方法により求められた造波抵抗は、船に作用する力の計測によって得られた造波抵抗より著しく小さいことが最近分かった。とくにこの傾向は、船型が 肥った形状であればあるほど大きく、船の先端近くの一様でない定常な流れと非定常な波動のなんらかの相互作用（例えば場所による分散関係の相違）を示すものと解釈され、それを説明する理論が試みられている。これは、まえがきで述べた（１）の問題に関連するものである。

３.Singular perturbation による解法

問題を簡単にするための有力な仮定は、波高が他の長さのスケールに比べて十分小さいとすることに加え、船が十分に細長いとすることである。その結果、典型的な singular perturbation の問題が生じる。次にそのような例の一つを説明する。

座標系は船の先端の位置を原点に、船の後方へ向かって x 軸を、鉛直上方に z軸を、また右舷の方向に y軸をとる。x 軸の負の方向に前進速度 Uで走る船が波浪中で動揺する時の流れを表す速度ポテンシアルを次のように表現する。

$$\phi = Ux + \phi_I(x,y,z)e^{i\omega t} + \phi_s(x,y,z) + \phi_r(x,y,z)e^{i\omega t} \tag{9}$$

ここで

$$\phi_I = \exp(\nu_0 z - i\nu_0 x) \tag{10}$$

は、入射する水波の速度ポテンシャルである。ϕ_s、ϕ_rは船による攪乱の定常部分と、非定常部分である。ωは入射波の周波数（ドプラーシフト後の）、ν_0は入射波の波数である。

船の幅や吃水が長さに比べて十分小さくεの大きさであると仮定し、またこれに関連して$\omega = O(\varepsilon^{-1/2}), U = O(1)$ とする。周波数に関する仮定は、少し人為的すぎるかもしれない。

ϕ_rは outer domain $(x = O(1), y = O(1))$ で次の自由表面条件（波の振幅に関して線形化されている）を満足しなければならない。

$$(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})^2\phi_r + g\frac{\partial \phi_r}{\partial z} = 0 \qquad \text{on} \qquad z = 0 \tag{11}$$

Outer solution　ϕ_r の一次近似は、船の中心軸上に分布した特異点分布$\sigma(x)e^{i\omega t}$で表現できる。後に述べるように船の近くでのϕ_rの x 方向の変化に関する仮定から、$\sigma(x)$ の x 方向の微係数を $O(\varepsilon^{-1/2}\sigma)$ と仮定すると、outer solution の inner expansion は $x = O(1)$、$y = O(\varepsilon)$ で次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\phi_r \sim -2\int_0^x & \sigma(\xi)d\xi \\
& \times \left\{ i\frac{\sqrt{\pi K_0}}{\sqrt{y}} \exp[-i\frac{\omega}{U}(x-\xi) - \frac{i}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2}{y} \right. \\
& \qquad + \frac{1}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2 z}{y^2} - i\frac{\pi}{4}] \\
& \quad - i\frac{\sqrt{\pi K_0}}{\sqrt{y}} \exp[-i\frac{\omega}{U}(x-\xi) + \frac{i}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2}{y} \\
& \qquad + \frac{1}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2 z}{y^2} + i\frac{\pi}{4}] \\
& \quad + \frac{\sqrt{2\pi \mid k_1 \mid (\omega/U)}}{(\tau+1/4)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{\mid x-\xi \mid}} \exp[ik_1\frac{\omega}{U}(x-\xi)] \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{2\pi \mid k_2 \mid (\omega/U)}}{(\tau+1/4)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{\mid x-\xi \mid}} \exp[ik_2\frac{\omega}{U}(x-\xi)] \right\}
\end{aligned} \tag{12}
$$

ここ で $k_{1,2} = -1-(1/2\tau \mp \sqrt{1/\tau+1/4\tau^2})$,　　$\nu = \omega^2/g$である。

（１２）式の右辺の第１項と第２項は divergent waves（船の進行方向に対して平行に近い波頂線の波）、第３、４項は transverse waves（船の進行方向にほぼ直角の波頂線の波）を表している。なお、第３、４項は第１、２項に比べると僅かに高次の量である。

船の近くで次の仮定をする。

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = O(f\varepsilon^{-1/2}), \qquad \frac{\partial f}{\partial y, z} = O(f\varepsilon^{-1}) \tag{13}
$$

ここで fは船の近くでの流れを表現する物理量である。（１３）の最初の条件の結果、$d\sigma/dx = O(\sigma\cdot\varepsilon^{-1/2})$ となる。

これらの仮定を船の幾何学的な条件と関連づけようとする問題は非線形となる。例えば船の幅を $O(\varepsilon)$、長さを $O(\varepsilon^{1/2})$ とすると

$$
n_1 = O(\varepsilon^{1/2}), \qquad n_{2,3} = O(1) \tag{14}
$$

となる。ここで $n_{1,2,3}$はそれぞれ船体表面の法線の x, y, z方向成分である。しかしこの条件のもとでは定常波の波高が大きく（$\zeta_0\partial/\partial z = O(1), \zeta_0$: 定常波高）、ϕ_rは $z=0$ でなく定常波面でその自由表面条件を満足しなければならない。また船体と水面の交線上の積分、いわゆる線積分が高次の量でなくなる。ここでは（１３）を天下り的に仮定しておく。

条件（１３）によって、inner solution は

$$
\frac{\partial^2\phi_r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_r}{\partial z^2} = 0 \tag{15}
$$

と自由表面条件（１１）を満足する必要がある。　このほかに船体上での境界条件が必要となるが、ここでは記述を省略する。なお、船自身が作る一様でない定常な流れ

場のなかで船が動揺するために、非定常な流れを決めるための船体上の境界条件に定常な波動に関係した項が現われる。動揺の振幅に対して境界条件を線形化しても、定常流れが動揺の振幅と関係がないためである。

Inner solution ϕ_rを求めるためには次のような新しい関数ψ_rを定義する。

$$\psi_r(x,y,z) = e^{i(\omega/U)x}\phi_r(x,y,z) \tag{16}$$

自由表面条件は次のようになる。

$$U^2\frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^2} + g\frac{\partial\psi_r}{\partial z} = 0 \qquad \text{on} \qquad z=0 \tag{17}$$

これは Daoud[1]が提案した船首定常流れの方程式と全く同一である。船首より前で$\psi_r = 0$、$\partial\psi_r/\partial x = 0$を仮定すると、良く知られているように$\psi_r$は次のように表される。[2]

$$\begin{aligned}\psi_r = &\int_{C(x)} d\ell\Sigma_r(x;\eta,\zeta)\log\frac{r}{r\prime} \\ &- 4\sqrt{K_0}\int_0^x d\xi\int_{C(\xi)} d\ell\Sigma_r(\xi;\eta(\xi),\zeta(\xi)) \\ &\times\int_0^\infty d\omega\exp[\omega^2(z+\zeta(\xi))]\cos\omega^2(y-\eta(\xi)) \\ &\times\sin\sqrt{K_0}\omega(x-\xi)\end{aligned} \tag{18}$$

ここで$C(x)$は座標xにおける船の断面を表す。

（18）で$y\to\infty$とし、outer expansion の第1項を求めると

$$\begin{aligned}\phi_r = &e^{-1(\omega/U)x}\psi_r \\ &\sim +\sqrt{\frac{\pi K_0}{y}}\int_0^x d\xi\int_R(\xi)d\ell\Sigma_r(\xi;\nu,\zeta) \\ &\times\exp[-i(\frac{\omega}{U})x - \frac{i}{4}\frac{K_0(X-\xi)^2}{y} \\ &+\frac{1}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2 z}{y^2} - i\frac{\pi}{\psi}] \\ &+i\sqrt{\frac{\pi K_0}{y}}\int_0^x d\xi\int_R(\xi)d\ell\Sigma_r(\xi;\nu,\zeta) \\ &\times\exp[-i(\frac{\omega}{U}x) + \frac{i}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2}{y} \\ &+\frac{1}{4}\frac{K_0(x-\xi)^2 z}{y^2} - i\frac{\pi}{\psi}]\end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。したがって

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\omega}{U}\xi}\int_{R(\xi)}\Sigma_r(\xi;\eta,\zeta)d\ell \tag{20}$$

とすれば（１２）式の最低次の項と（１９）は match する。

以上は、解くべき境界値問題を何とか２次元の問題として解析を容易にしようとする、いわゆる細長船理論の一例である。細長船理論にはこの他にもいろいろな version がある[2)]。それぞれ一長一短があり、この例も細かく見れば多くの難点、近似の inconsistency があるが、自由表面条件に３次元性を保存できることがその魅力である。

前節でも述べたように、一様でない定常流れとの相互作用は船首付近で強いと考えられるので、それを正しく考慮にいれた解析が必要である。普通の船型では船首を除けば細長船の近似が成り立つと思われるので、船首近くの解を３次元的に求め、後部の細長船近似による解と matching するような方法を考えるべきであろう。

４．境界要素法による解法

ϕ_r はグリーーンの公式、自由表面条件、遠方の radiation condition から次のように書くことが出来る。

$$\begin{aligned}\phi_r(P) = &-\iint_{S_H}\left[\frac{\partial\phi_r(Q)}{\partial n} - \phi_r(Q)\frac{\partial}{\partial n}\right]G(P,Q)dS \\ &-\frac{1}{4\pi K_0}\int_{C_H}\left[\frac{\partial\phi_r(Q)}{\partial x'} - \phi_r(Q)\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{2i\omega}{U}\right]G(P,Q)dS\end{aligned} \tag{21}$$

と書ける。ここで S_Hは船体の水中にある部分の表面、C_Hは自由表面と船体の交線を表す。$G(P,Q)$ は自由表面条件（１１）と R.C. を満足するグリーン関数である。$P=(x,y,z)$ と $Q=(x',y',z')$ は field and source points である。

$G(P,Q)$ の表示の一つは次のようなものである[3)]。

$$G(x,y,z;x',y',z') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - \frac{i}{2\pi}K_0T(X,Y,Z) \tag{22}$$

ここで

$$T(X,Y,Z) = \int_{\alpha-\pi}^{-\frac{\pi}{2}+\varphi-i\varepsilon}\frac{d\theta}{\sqrt{1+4\tau\cos\theta}}[k_2e^{k_2\varpi} - \mathrm{sgn}(\cos\theta)k_1e^{k_1\varpi}] \tag{23}$$

$$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z\mp z')^2} \quad ,$$

$$\left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\cos^2\theta}(1+2\tau\cos\theta\pm\sqrt{1+4\tau\cos\theta}) \quad ,$$

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad , \quad \varepsilon = \sinh^{-1}\frac{|Z|}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad ,$$

$$\alpha = \begin{cases} \cos^{-1}\dfrac{1}{4\tau} & (4\tau > 1) \\ -i\cosh^{-1}\dfrac{1}{4\tau} & (4\tau < 1) \end{cases} \quad ,$$

$$\tau = \frac{U\omega_e}{g} \quad , \quad K_0 = \frac{g}{U^2} \quad ,$$

$$X = K_0(x - x') \quad , \quad Y = K_0|y - y'| \quad , \quad Z = K_0(z + z')$$

一般に船体表面上の条件は Neumann 形の境界条件であるから、（２１）から船体上のϕ_rに関する積分方程式が得られる。この方程式を境界要素法等で解けば所期の解が得られるはずである。このときの数値解析上の問題点は以下の二つである。

グリーン関数の数値計算に時間がかかること、船体と自由表面との交線上の積分をどのように取り扱うかである。前者については、最近開発された（２３）の数値積分法によって大体の解決が得られた[4)]。その結果船体表面を２０００を超えるパネルで近似した計算が可能となり、著しく計算の信頼度が増した。後者については、交線上の特異点の強さを決定するために、Extra の条件が必要になる（例えば交線での特異性の次数が一番低くなるようにする Least Singularity の条件）。けれどもどのような条件が物理的に正しい解を与えるのかは分からない。現在得られている数値解は、没水体に関するものか(（２１）式の右辺の２番目の積分がない場合)、上記の Least SIngular の条件によるものだけである。

グリーン関数として（２３）の代わりに単純な$1/r$の形のものを用いる方法が考えられる。この場合は（２１）におけるS_Hは自由表面をも含むことになる。この方法の利点は、グリーン関数の評価が容易であることはもちろんであるが、自由表面条件として線形の（１１）のみでなく、例えば船の近くで一様でない定常流の影響を考慮した弱非線形の自由表面条件への拡張が容易なことである。ただしこれにも２つの難点がある。その一つは、自由表面を有限個のパネルに分割することから、波動の分散関係が完全には満足されなくなり、数値計算に重大な不安定が生じることである。これは１.まえがきの（２）に関連した問題である。二番目は、同じく（４）に関連して、Radiation Condition をどのように課するかである。

最初の問題に関しては、最近の Nakos & Sclavounos[5)]の研究によってほぼ解決を見た。二番目の問題に関しては、一般的に合理的な方法は与えられていない。後流の影響が前方に及ばない場合、すなわち$\tau >> 0.25$の場合は撹乱のない上流から計算を始めることによって部分的にこの問題を避けることができる。

５.あとがき

著者が最近行った研究を中心にして書いてきた。この方面の研究の極く僅かの部分であることはもちろんであるが、近視眼的な物の見方になっていることを恐れるものである。ただ、特殊な研究分野ではあるが興味をもっていただける若い研究者が一人でもあれば望外の喜びである。

なお船の前進速度が小さいという仮定のもとで、船の近くで一様でない定常流れの影響を正確に考慮した合理的な理論の研究が最近盛んになってきている。

参考文献

(1) Daoud,N.:Potential flow near to a fine ship's bow,Rep.No.177,Dept.Nav.Arch. U. Michigan (1975)
(2)Ogilvie,T.F.:Singular perturbation problems in ship hydrodynamics, Advances in Applied Mechanics,17 (1977)
(3)Bessho,M.:On the fundamental singularity in at a theory of ship motions in a seaway, Memoirs. the Defence Academy, Japan, Vol.17. No.8 (1977)
(4)Iwashita,H. & Ohkusu,M.:The Green function method for ship motions at forward speed , Ship Technology Research, Vol.39,No.2 (1992)
(5)Nakos,D.F. & Sclavounos,P.D.:Steady and unsteady ship wave patterns, J.Fluid Mechanics, 215 (1990)